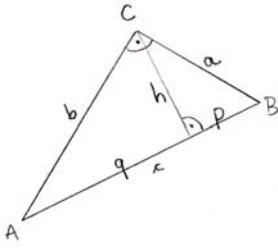


I. Reelle Zahlen

L9_01	<ul style="list-style-type: none"> ○ Rationale Zahlen: $5; \frac{2}{7}; 2,8; 4,2\overline{3}; \sqrt{9}$ ○ Irrationale Zahlen: $\sqrt{7}; 2+\sqrt{2}; 6\cdot\sqrt{5}; \frac{1}{\sqrt{6}}$
L9_02	<ul style="list-style-type: none"> ○ $-\sqrt{64a^5} = -\sqrt{8^2 a^4 \cdot a} = -8a^2 \cdot \sqrt{a}$ ○ $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$ ○ $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 16}{3}} = \sqrt{16} = 4$ ○ $\sqrt{11} + \sqrt{5}$ ist bereits vollständig vereinfacht! (Achtung: $\sqrt{11} + \sqrt{5} \neq \sqrt{11+5} = 4$, vgl. Taschenrechner, $\sqrt{11} \approx 3,32$ und $\sqrt{5} \approx 2,24$, also $\sqrt{11} + \sqrt{5} \approx 5,56 \neq 4$)
L9_03	<ul style="list-style-type: none"> ○ $\sqrt[3]{64a^6} = \sqrt[3]{4^3 a^6} = 4a^2$ ○ $6^{2,5} = 6^2 \cdot \sqrt{6} = \sqrt{6^5} = \sqrt{6^4 \cdot 6} = 36\sqrt{6}$ ○ $2 \cdot \sqrt[3]{125^{-1}} - 4\sqrt{5} : \sqrt{5} + \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{125}} - 4 + \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} + \sqrt[3]{2 \cdot 4^3} =$ $= 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5^3}} - 4 + 3\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} = 2 \cdot \frac{1}{5} - 4 + 7\sqrt[3]{2} = -3\frac{3}{5} + 7\sqrt[3]{2}$ ○ $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{4096} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{4}} = 2^3 = 8$
L9_04	<ul style="list-style-type: none"> ○ $5^5 \cdot 5^7 = 5^{5+7} = 5^{12}$ ○ $3^8 : 3^3 = 3^{8-3} = 3^5$ ○ $6^{-2} \cdot 8^{-2} = (6 \cdot 8)^{-2} = 48^{-2}$ ○ $\frac{45^3}{3^3} = \left(\frac{45}{3}\right)^3 = 15^3$ ○ $(27^2)^{-3} = 27^{2 \cdot (-3)} = 27^{-6} = (3^3)^{-6} = 3^{3 \cdot (-6)} = 3^{-18}$
L9_05	<ul style="list-style-type: none"> ○ $16x^2 + 40xz + 25z^2 = (4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot 5z + (5z)^2 = (4x + 5z)^2$ ○ $\left(\frac{1}{s} - 3t\right) \left(3t + \frac{1}{s}\right) = \left(\frac{1}{s} - 3t\right) \left(\frac{1}{s} + 3t\right) = \left(\frac{1}{s}\right)^2 - (3t)^2 = \frac{1}{s^2} - 9t^2$ ○ $a^2 + 2b^2 - \sqrt{8} \cdot ba = a^2 - \sqrt{8} \cdot ab + 2b^2 = a^2 - 2\sqrt{2} \cdot ab + (\sqrt{2} \cdot b)^2$ $= a^2 - 2 \cdot a \cdot \sqrt{2} \cdot b + (\sqrt{2} \cdot b)^2 = (a - \sqrt{2} \cdot b)^2$
L9_06	<ul style="list-style-type: none"> ○ $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{5} = \frac{3}{5} \sqrt{5}$ ○ $\frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2}{(4)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2 \cdot (4)^{\frac{2}{3}}}{(4)^{\frac{1}{3}} \cdot (4)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{4^2}}{(4)^{\frac{1+2}{3}}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{4^2}}{4} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{16}$ ○ $\frac{1}{3 - \sqrt{6}} = \frac{1 \cdot (3 + \sqrt{6})}{(3 - \sqrt{6}) \cdot (3 + \sqrt{6})} = \frac{(3 + \sqrt{6})}{3^2 - (\sqrt{6})^2} = \frac{3 + \sqrt{6}}{9 - 6} = \frac{3 + \sqrt{6}}{3} = 1 + \frac{1}{3} \sqrt{6}$ ○ $\frac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 4} = \frac{(4 - \sqrt{2}) \cdot (4 - \sqrt{2})}{(4 + \sqrt{2}) \cdot (4 - \sqrt{2})} = \frac{16 - 8\sqrt{2} + 2}{16 - 2} = \frac{18 - 8\sqrt{2}}{14}$

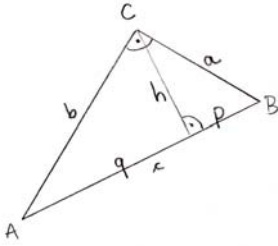
II. Satzgruppe des Pythagoras

L9_07 In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt: Das Quadrat über der Kathete ist inhaltsgleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.



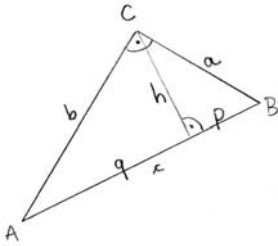
$$b^2 = cq, \quad a^2 = cp$$

L9_08 In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt: Das Quadrat über der Höhe ist inhaltsgleich dem Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten.



$$h^2 = pq$$

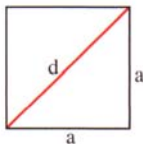
L9_09 In jedem rechtwinkligen Dreieck gilt: Die Summe der Quadrate über den Katheten ist inhaltsgleich dem Quadrat über der Hypotenuse.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

L9_10 Es gilt $a^2 = b^2 + c^2$, da $(10\text{cm})^2 = (8\text{cm})^2 + (6\text{cm})^2$ ist.
Das Dreieck ist nach dem Kehrsatz zum Satz des Pythagoras rechtwinklig bei der Ecke A, also $\alpha = 90^\circ$.

L9_11

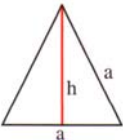


Satz des Pythagoras: $d^2 = a^2 + a^2$

Also ist $d^2 = 2a^2$ und somit $d = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

Formel: $d = a\sqrt{2}$

L9_12



Satz des Pythagoras: $a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$


Also ist $h^2 = \frac{3}{4}a^2$ und somit $h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

Formel: $h = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$

III. Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen

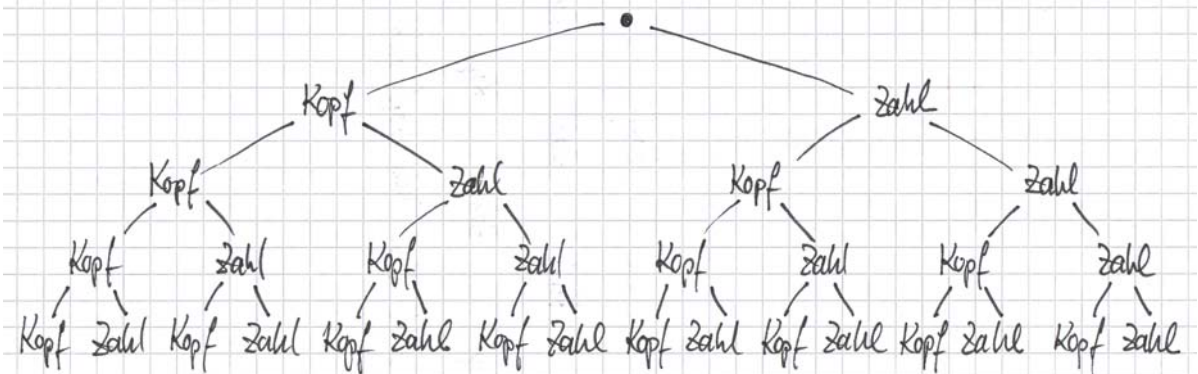
L9_13	<p>$g : x \mapsto -2x^2 + 3x - 4$, allgemein: $g : x \mapsto ax^2 + bx + c$</p> <p>Die Parabel zur Funktion g ist nach unten geöffnet ($a = -2 < 0$) und enger als die Normalparabel ($a = 2 > 1$).</p>
L9_14	<p>$h : x \mapsto x^2 - 4$, allgemein: $h : x \mapsto x^2 + e$</p> <p>Die Parabel zur Funktion j ist eine Normalparabel, die ausschließlich in y-Richtung verschoben ist und den Scheitelpunkt $S(0/-4)$, allgemein $S(0/e)$ aufweist.</p>
L9_15	<p>$j : x \mapsto (x + 2)^2$, allgemein: $j : x \mapsto (x + d)^2$</p> <p>Die Parabel zur Funktion j ist eine Normalparabel, die ausschließlich in x-Richtung verschoben ist und den Scheitelpunkt $S(-2/0)$, allgemein $S(-d/0)$ aufweist.</p>
L9_16	<p>$g(x) = -2x^2 + 3x - 4$</p> $= -2\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) - 4 \quad (\text{ausklammern})$ $= -2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) - 4 \quad (\text{quadratisch ergänzen})$ $= -2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) + 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 4 \quad (\text{Distributivgesetz})$ $= -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + 2 \cdot \frac{9}{16} - 4 \quad (\text{Binomische Formel})$ $= -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - 2\frac{7}{8}$ <p>Der Scheitel lautet: $S\left(\frac{3}{4} / -2\frac{7}{8}\right)$</p>
L9_17	<p>$2x^2 - 3x + 1 = 0$, allgemein: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$</p> <p>hier: $x_{1/2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$</p> <p>und somit ergeben sich die beiden Lösungen (Nullstellen) $x_1 = 1$ und $x_2 = 0,5$.</p> <p>Anmerkung: $D = b^2 - 4ac$ heißt Diskriminante. Für $D > 0$ gibt es genau zwei Lösungen. Für $D = 0$ gibt es genau eine Lösung. Für $D < 0$ gibt es keine Lösung.</p>

IV. Quadratische Funktionen in Anwendungen

L9_18	<p>(I) $a + b + c = 2$ (II) $9a - 3b + c = 2$ (III) $8a - 4b + 2c = -2$</p> <p>-----</p> <p>(I) - (II) $-8a + 4b = 0 \Rightarrow -2a + b = 0$ (IV) 2(I) - (III) $-6a + 6b = 6 \Rightarrow -a + b = 1$ (V)</p> <p>-----</p> <p>(IV) - (V) $-a = -1 \Rightarrow a = 1$ in (V): $-1 + b = 1 \Rightarrow b = 2$ in (I): $1 + 2 + c = 2 \Rightarrow c = -1$</p>
L9_19	<p>Setze die Koordinaten der Punkte in die Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$ ein.</p> <p>$A(1/1) \in G_f \Rightarrow 1 = a + b + c$ $B(2/0) \in G_f \Rightarrow 0 = 4a + 2b + c$ $C(0/-3) \in G_f \Rightarrow -3 = c$</p> <p>Löse also das lineare Gleichungssystem</p> <p>(I) $a + b + c = 1$ (II) $4a + 2b + c = 0$ (III) $c = -3$</p> <p>-----</p> <p>(III) in (I): $a + b - 3 = 1 \Rightarrow a + b = 4 \Rightarrow 2a + 2b = 8$ (IV) (III) in (II): $4a + 2b - 3 = 0 \Rightarrow 4a + 2b = 3$ (V)</p> <p>-----</p> <p>(IV) - (V) $-2a = 5 \Rightarrow a = -2,5$ in (I): $-2,5 + b + (-3) = 1 \Rightarrow b = 6,5$</p>
L9_20	<p>Die Funktionsgleichungen der beiden Funktionen f und g werden gleichgesetzt, also $f(x) = g(x)$. Mittels Äquivalenzumformungen lässt sich aus diesem Ansatz meist eine quadratische Gleichung bestimmen, die maximal zwei Lösungen aufweist. Diese Lösungen stellen die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen.</p> <p>Z.B. $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = x + 1$</p> <p>gleichsetzen liefert $\frac{2}{x} = x + 1$ und nach Multiplikation mit x erhält man die quadratische Gleichung $2 = x^2 + x$ oder $x^2 + x - 2 = 0$. Die beiden Lösungen sind $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$. Die beiden Schnittpunkte haben also die Koordinaten $S_1(1/2)$ und $S_2(-2/-1)$.</p>
L9_21	

V. Wahrscheinlichkeit bei mehrstufigen Zufallsexperimenten

L9_22 Ein aus mehreren Teilerperimenten bestehendes Zufallsexperiment heißt mehrstufiges Zufallsexperiment. Je nach Anzahl der Stufen sind die Ergebnisse Paare, Tripel oder allgemein n-Tupel.
 Z.B. Eine 1€Münze wird viermal geworfen, die Ergebnisse sind also 4-Tupel, z.B. (Kopf,Kopf,Zahl,Kopf).
 Baumdiagramm:



L9_23 1. Pfadregel:
 Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses, indem man die Wahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Pfades multipliziert.
 2. Pfadregel:
 Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, indem man die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Pfade bildet, die zu dem Ereignis gehören.

L9_24 Der Würfel muss dreimal geworfen werden, denn damit erhält man $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$ verschieden Ergebnisse. 49 dieser Tripel müssen ausgewählt und den Lottozahlen von 1 bis 49 eindeutig zugeordnet werden, z.B.

Lottozahl	Tripel	Lottozahl	Tripel	Lottozahl	Tripel	Lottozahl	Tripel
1	(1,1,1)	6	(1,1,6)	11	(1,2,5)	16	(1,3,4)
2	(1,1,2)	7	(1,2,1)	12	(1,2,6)	17	(1,3,5)
3	(1,1,3)	8	(1,2,2)	13	(1,3,1)	18	(1,3,6) usw.
4	(1,1,4)	9	(1,2,3)	14	(1,3,2)	19	(1,4,1)
5	(1,1,5)	10	(1,2,4)	15	(1,3,3)	20	(1,4,2)

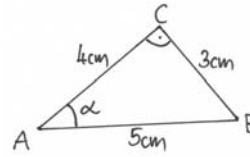
VI. Trigonometrie

L9_25

$$\text{Sinus von } \alpha: \sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathe}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Kosinus von } \alpha: \cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Tangens von } \alpha: \tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathe}}{\text{Ankathete}} = \frac{3}{4}$$



L9_26

$$\bullet \quad \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 30,5^\circ - 90^\circ = 59,5^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \sin \alpha = 7,1 \text{ cm} \cdot \sin 30,5^\circ \approx 3,6 \text{ cm}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \cos \alpha = 7,1 \text{ cm} \cdot \cos 30,5^\circ \approx 6,1 \text{ cm}$$

$$\bullet \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{6 \text{ cm}}{3,3 \text{ cm}} \approx 1,818 \Rightarrow \alpha \approx 61,2^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 61,2^\circ - 90^\circ = 28,8^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{6 \text{ cm}}{\sin 61,2^\circ} \approx \frac{6 \text{ cm}}{0,876} \approx 6,8 \text{ cm}$$

L9_27

$$(1) \sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) \text{ bzw. } \cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

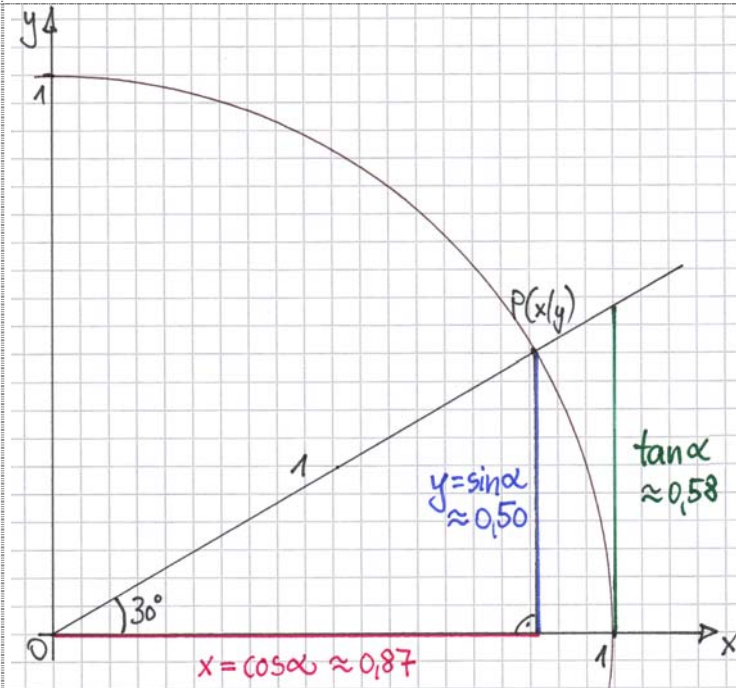
$$(2) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(3) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ wobei } \cos \alpha \neq 0, \text{ also } \alpha \neq 90^\circ$$

Term vereinfachen:

$$1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 - \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 - \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) = 1 - (\tan^2 \alpha + 1) = -\tan^2 \alpha$$

L9_28



VII. Raumgeometrie

L9_29	<p>Gerade g und Ebene E:</p> <ul style="list-style-type: none"> • $g \parallel E$ (Die Gerade liegt parallel zur Ebene.) • $g \in E$ (Die Gerade liegt in der Ebene.) • $g \cap E = S$ (Die Gerade schneidet die Ebene in einem Punkt S unter einem Neigungswinkel ε.) • $g \perp E$ (Die Geraden schneidet die Ebene E in einem Punkt S unter dem Neigungswinkel $\varepsilon = 90^\circ$. Die Gerade heißt dann Lot oder Senkrechte.) <p>Ebene E und F:</p> <ul style="list-style-type: none"> • $E \parallel F$ (Die Ebenen liegen parallel zueinander.) • $E \equiv F$ (Die Ebenen liegen aufeinander, sind also identisch.) • $E \cap F = s$ (Die Ebenen schneiden sich in einer Gerade s unter einem Neigungswinkel α.) • $E \perp F$ (Die Ebenen schneiden sich in einer Gerade s unter dem Neigungswinkel $\alpha = 90^\circ$. Die Ebenen stehen aufeinander senkrecht.)
L9_30	<p>Volumen Prisma: $V = G \cdot h$ $V = G \cdot h = 48\text{cm}^2 \cdot 5\text{cm} = 240\text{cm}^3$ Oberfläche Prisma: $O = 2G + M$ $O = 2 \cdot 48\text{cm}^2 + 5\text{cm} \cdot (6\text{cm} + 8\text{cm} + 6\text{cm} + 8\text{cm}) =$ $96\text{cm}^2 + 5\text{cm} \cdot 28\text{cm} = 96\text{cm}^2 + 140\text{cm}^2 = 236\text{cm}^2$</p>
L9_31	<p>Volumen Zylinder: $V = G \cdot h$ $V = G \cdot h = r^2 \pi \cdot 5\text{cm} = (3\text{cm})^2 \pi \cdot 5\text{cm} \approx 28,27\text{cm}^2 \cdot 5\text{cm} \approx 141,4\text{cm}^3$ Oberfläche Zylinder: $O = 2G + M$ $O \approx 2 \cdot 28,27\text{cm}^2 + 5\text{cm} \cdot (2 \cdot r \cdot \pi) =$ $56,54\text{cm}^2 + 5\text{cm} \cdot (2 \cdot 3\text{cm} \cdot \pi) \approx 56,54\text{cm}^2 + 5\text{cm} \cdot 18,85\text{cm} =$ $56,54\text{cm}^2 + 94,25\text{cm}^2 \approx 150,8\text{cm}^2$</p>
L9_32	<p>Volumen Pyramide: $V = \frac{1}{3} G \cdot h$ $V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} 16\text{cm}^2 \cdot 5\text{cm} \approx 5,33\text{cm}^2 \cdot 5\text{cm} \approx 26,7\text{cm}^3$ Oberfläche Pyramide: $O = G + M$ Die Mantelfläche besteht aus vier gleichseitigen Dreiecken, dessen Höhe h_{Seite} sich mit Hilfe des Satzes des Pythagoras ermitteln lässt: $h_{\text{Seite}}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$, also $h_{\text{Seite}} = \sqrt{4\text{cm}^2 + 25\text{cm}^2} \approx 5,385\text{cm}$ Somit: $O = 16\text{cm}^2 + M \approx$ $16\text{cm}^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4\text{cm} \cdot 5,385\text{cm}\right) = 16\text{cm}^2 + 43,08\text{cm}^2 \approx 59,1\text{cm}^2$</p>
L9_33	<p>Volumen Kegel: $V = \frac{1}{3} G \cdot h$ $V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2 \pi \cdot 5\text{cm} = \frac{1}{3} \cdot (3\text{cm})^2 \cdot \pi \cdot 5\text{cm} \approx \frac{1}{3} \cdot 28,27\text{cm}^2 \cdot 5\text{cm} \approx 47,1\text{cm}^3$ Oberfläche Kegel: $O = G + M$ Die Mantellinie s lässt sich mit Hilfe des Satzes des Pythagoras bestimmen: $s^2 = r^2 + h^2$, also $s = \sqrt{(3\text{cm})^2 + (5\text{cm})^2} \approx 5,83\text{cm}$. Somit: $O \approx 28,27\text{cm}^2 + \pi \cdot r \cdot s \approx$ $28,27\text{cm}^2 + \pi \cdot 3\text{cm} \cdot 5,83\text{cm} \approx 28,27\text{cm}^2 + 54,95\text{cm}^2 \approx 83,2\text{cm}^2$</p>

VIII. Strategien

L9_34 (individuelle Beispiele)