Lösungen

Kreis und Kugel

1. a. V=$\frac{4}{3}\cdot 5^3 \cdot \pi\ cm^3 = 166\frac{2}{3}\cdot \pi\ cm^3 \approx 523{,}6\ cm^3$; A=4·5^2·π cm² ≈ 314,2 cm²

b. V_2=$\frac{4}{3}\cdot r_2^{\ 3}\cdot \pi$ = 8V= 8·$\frac{4}{3}\cdot 5^3\cdot \pi\ cm^3$ => $r_2^{\ 3}$=8·$5^3$$cm^3$=1000 cm^3; r_2=10cm

2. Volumen eines Tropfens: $V = \frac{4}{3} r^3\pi = \frac{4}{3}\cdot (1{,}5mm)^3\cdot \pi = 4{,}5\cdot \pi\ mm^3$

Anzahl der Tropfen: 12 pro Minute, 720 pro Stunde, 17280 pro Tag, 6307200 pro Jahr mit 365 Tagen.

Gesamtvolumen: 89165939 mm³=89165 cm³=89dm³, also etwa 90 Liter

3. 1. Einen Kreis ausschneiden: r_1=$\frac{1}{2}\cdot a = 15{,}5cm$ $A_1 = (15{,}5cm)^2\cdot \pi = 754{,}77cm^2$

Rest $R_1 = (31cm)^2 - 754{,}77cm^2 = 206{,}23cm^2$

2. Vier Kreise ausschneiden: $r_2 = \frac{1}{4}\cdot a = 7{,}75cm$ $A_2 = (7{,}75cm)^2\cdot \pi = 188{,}69cm^2$

Vier Kreise: $4\cdot A_2 = 754{,}77cm^2$ Rest $R_2 = (31cm)^2 - 754{,}77cm^2 = 206{,}23cm^2$

Der Verschnitt bleibt gleich, egal ob einer oder vier Kreise ausgeschnitten werden (übrigens auch bei 9, 16, 25, ...Kreisen).

4. Radius Kreis (=Kästchendiagonale): $r^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$; $r = a\sqrt{2}$

Fläche Segment: $A_S = \frac{1}{4}\left[\left(a\sqrt{2}\right)^2\pi - 4a^2\right] = \frac{1}{2}a^2\pi - a^2$

Fläche Figur: $A = 16a^2 + 8A_S = 8a^2 + 4a^2\pi$

Umfang Figur: $U = 2U_{Kreis} = 4\sqrt{2}a\pi$

5. Volumen der Torte: V_1=r²·π·h=(13cm)²·π·5cm=2654,6cm³

Volumen eines Stücks: V_2=221,22cm³

Masse eines Stücks: m=110,6 g

Kalorien eines Stücks: 357,27, also etwa 360 Kalorien.

Trigonometrie

1.a. α im Bogenmaß: $\frac{\pi}{6}$

b. β im Bogenmaß: $\frac{7}{6}\pi$

2. a. α=22,5°

b. $\beta=\frac{180°}{\pi}\cdot 0{,}9=51{,}6°$

3. φ_1=50°; φ_2=180°-50°= 130°; φ_3=360°+50°=410°

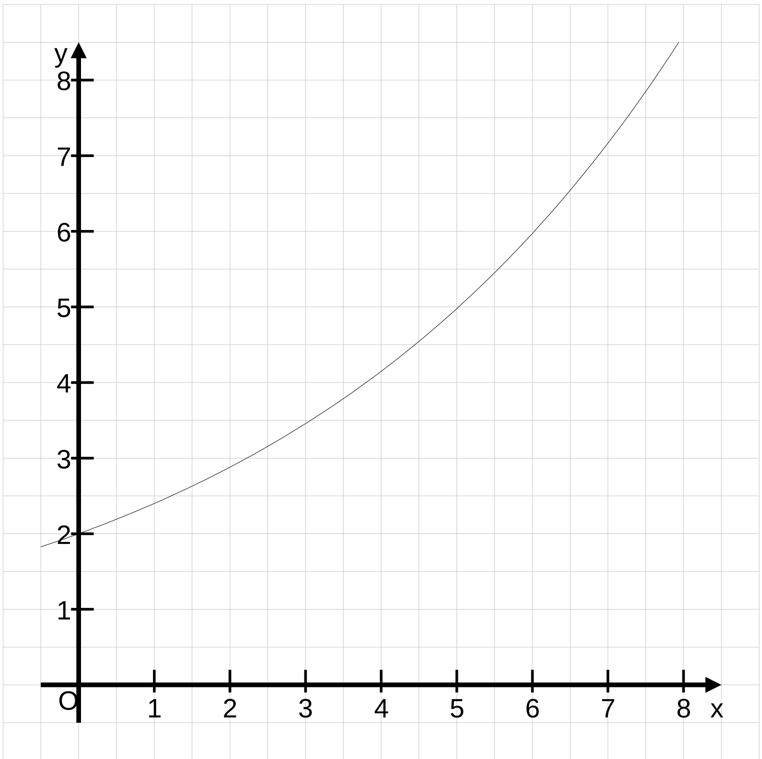
4. Für $90° < \alpha < 180°$

5. Sinussatz: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{a}{b}$ => $\sin\beta=\frac{b\cdot\sin\alpha}{a}=\frac{3{,}5\cdot 0{,}5}{5{,}0}=0{,}35$; β=20°, γ=180°-30°-20°=130°

$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=\frac{c}{b}$ => $c=\frac{b\cdot\sin\gamma}{\sin\beta}=\frac{3{,}5\,cm\cdot 0{,}7660}{0{,}35}=7{,}66cm\approx 7{,}7$cm

6. f(x)=2sin(x+π) oder f(x)=-2sinx

Exponentialfunktionen und Logarithmus



1. $f(x) = 2 \cdot 1{,}2^x$; allgemein $f(x) = b \cdot a^x$, b wird als **Anfangswert** bezeichnet und gibt an, welchen Wert die Funktion bei x=0 erreicht. a heißt **Wachstumsfaktor** und gibt an, mit welchem Faktor der vorherige Wert multipliziert wird, wenn man x jeweils um 1 erhöht.

2. Wachstum: Kapitalanlage mit Zinseszins, Wachstum einer Bakterienkultur, Bevölkerungswachstum

   Abnahme: Radioaktiver Zerfall, Abkühlungsvorgänge (betrachte den Temperatur*unterschied*),

3. a. $\lg(2^{x+1})=\lg 3$

   $(x+1)\lg 2=\lg 3$

   $x=(\lg 3):(\lg 2)-1=0{,}584$

   b. $3 \cdot 5^x=4^{2x}$

   $$3 = \frac{4^{2x}}{5^x}$$

   $$3 = \left(\frac{4^2}{5}\right)^x$$

   $3=3{,}2^x$

   $$x=\frac{\lg 3}{\lg 3{,}2} \approx 0{,}94$$

4. a. Nach x Jahren beträgt das Kapital: $f(x)=6\,000 \cdot 1{,}045^x$, also nach 5 Jahren: $f(5)=6\,000\cdot 1{,}045^5=7\,477{,}09$

   b. Verdoppelung auf 12 000 €: $12\,000=6\,000 \cdot 1{,}045^x$; $2=1{,}045^x$; $x=\frac{\lg 2}{\lg 1{,}045}=15{,}75$;

   also nach 16 Jahren.

   c. Verdoppelung nach 10 Jahren: $2=a^{10}$; $a=\sqrt[10]{2}=1{,}07177...$Der Zinssatz müsste also mindestens 7,2% betragen.

5. Bekannt ist die Halbwertszeit: $0{,}5=a^{5730}$, also ist der Wachstumsfaktor

$a=\sqrt[5730]{0{,}5}=0{,}999879039\ldots$ (hier also eine Abnahme!);

Es ist: $1{,}1\cdot 10^{-10}=1{,}5\cdot 10^{-10}\cdot a^x$, wobei a bereits berechnet wurde und x die Zahl der vergangenen Jahre ist. Also ist $a^x=\frac{1{,}1}{1{,}5}$ und damit

$x=\frac{\lg\frac{1{,}1}{1{,}5}}{\lg a}=\frac{-0{,}134698573}{-5{,}253577499\cdot 10^{-5}}=2563{,}9$. Die Knochen sind also in etwa 2560 Jahre alt.

Vierfeldertafel und bedingte Wahrscheinlichkeit

1.a) $P(A)=\frac{6}{10}=0{,}6$

b) $P(B)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{3}$

c) $P(C)=\frac{5}{9}$

2.a. Lösung mit Baum und Pfadregeln: $P(\text{nur Kathi})=\frac{1}{20}\cdot\frac{17}{19}+\frac{17}{20}\cdot\frac{1}{19}=\frac{17}{190}=8{,}9\%$

b. $P(\text{Kathi und David})=\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{19}+\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{19}=\frac{1}{190}=0{,}5\%$

c. $P(\text{mindestens einer})=1-P(\text{keiner})=1-\frac{17}{20}\cdot\frac{16}{19}=1-\frac{68}{95}=28{,}4\%$

3.

	Mann	Frau	
Rücksicht	0,6·0,75=0,45	0,13	0,58
Keine Rücksicht	0,15	0,27	0,42
	0,6	0,4	1

Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P_F(\text{keine Rücksicht})=\frac{P(F\cap\overline{R})}{P(F)}=\frac{0{,}27}{0{,}4}=0{,}675=67{,}5\%$

4. a. Vielfache von 3: 3, 6, 9, 12, ….96, 99, das sind 33 Zahlen, davon sind 16 Vielfache von 6, also P(A)=$\frac{16}{33} \approx 48{,}5\%$

b. Alle Vielfachen von 12 sind zugleich Vielfachen von 6: P(B)=100%

c. Vielfache von 5: 5, 10, 15, 20, ….100; insgesamt 20 Zahlen; Vielfaches von 5 und Vielfaches von 6 (kgV)=5·6=30, also auch 60 und 90, also 3 Zahlen; P(C)=$\frac{3}{20}$ =15%

5.

	J	$\overline{J}$	
T	60	10	70
$\overline{T}$	15	15	30
	75	25	100

P(T)=$\frac{70}{100} = 0{,}7$

P(J∪T)=$\frac{60+15+10}{100} = \frac{85}{100}$

P_T(J)=$\frac{P(T \cap J)}{P(T)} = \frac{60}{70} = 85{,}7\%$

Ganzrationale Funktionen

1.a) $\lim\limits_{x\to\infty}(-2x^3 + 3x)$ = - ∞

b)Punktsymmetrie, wegen $f(-x)=-2(-x)^3+3(-x)=2x^3-3x=-(-2x^3+3x)=-f(x)$

c)Nullstellen $x_1= -\sqrt{\frac{3}{2}}$; $x_2=0$; $x_3=\sqrt{\frac{3}{2}}$

2.

$(16x^4-1):(2x-1) = 8x^3+4x^2+2x+1$ für alle x aus D=R\{ $\frac{1}{2}$ }

$-(16x^4-8x^3)$

$8x^3-1$

$-(8x^3-4x^2)$

$4x^2-1$

$-(4x^2-2x)$

$2x-1$

$-(2x-1)$

---- ------

3. a. $x_1=-5$; $x_2=-3$; $x^3=3$

b. $x^4+x^3-2x^2=x^2(x^2+x-2)=x^2(x+2)(x-1)$ (Zerlegung mit dem Satz von VIETA)
Also: $x_1=0$ (doppelte Nullstelle), $x_2=-2$; $x_3=1$

c. $x^3-2x^2-3x+10=0$ Untersuche, ob die Teiler von 10 Nullstellen sind: -2 ist Nullstelle!
Abspalten von (x+2) mit Polynomdivision:
$(x^3-2x^2-3x+10):(x+2) = x^2-4x+5$ für alle x aus $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$$\begin{array}{l}
-(x^3+2x^2) \\
\hline
\quad -4x^2-3x+10 \\
\quad -(-4x^2-8x) \\
\hline
\qquad 5x+10 \\
\qquad -(5x+10) \\
\hline
\qquad \text{---- ------}
\end{array}$$

Untersuche x^2-4x+5mit der Mitternachtsformel: keine weitere Nullstelle!

4. Aus den Nullstellen ablesbar: $f_1(x)=(x-2)(x+3)(x+1)^2$, Bestimme den y-Achsenabschnitt: $f_1(0)=-6$, die gesuchte Funktion hat aber einen y-Achsenabschnitt von y=-1, also ist:
$f(x)=\frac{1}{6}\cdot f_1(x)= \frac{1}{6}(x-2)(x+3)(x+1)^2$

5. Aus den Nullstellen ersichtlich: $f(x)=a\cdot(x+2)^2(x-1)(x-2)$,
y-Achsenabschnitt: $f(0)=a\cdot 2^2\cdot(-1)\cdot(-2)=a\cdot 8$, der soll aber sein: $f(0)=2$, also ist $a\cdot 8=2$, $a=\frac{1}{4}$

Also: $f(x)= \frac{1}{4}\cdot(x+2)^2(x-1)(x-2)$

Eigenschaften von Funktionen

1. $f_2(x)=(x+4)^2+3$; $f_2(x)=-((x+4)^2+3)=-(x+4)^2-3$

2. y-Achsenabschnitt von f: $f(0)=3^0=1$, also muss der Graph um 1 nach unten geschoben werden: $g(x)=3^{-x}-1$

3. a. Konvergenz: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$; Divergenz: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$
b. Konvergenz: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=3$; Divergenz: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
c. Divergenz: Grenzwerte sind nicht bestimmbar.
d. Konvergenz: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$; Konvergenz: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

4. a. Die Aussage kann wahr sein (z.B. für $f(x)=-\frac{1}{x}+1$).

b. Die Aussage kann wahr sein (z.B. für $f(x)=\frac{1}{x}\cdot\sin x+1$).

c. Die Aussage kann nicht wahr sein.

5. a. z.B. $f(x)=2^{-x}$ oder $f(x)=0{,}1^{x}$
b. z.B. $f(x)=2^{x}$
c. z.B. $f(x)=\frac{1}{x}$
d. z.B. $f(x)=\frac{1}{x}+1$ oder $f(x)=2^{-x}+1$ oder $f(x)=0{,}1^{x}+1$